洞燭機先覺算天下

壹、前言：放諸四海皆準的機率現象

古今中外人類在追求生存滿足需求的過程當中，雖有部分情況是確定的，然而大部分的情況，都是處於不確定的狀況當中。舉例而言，包括今天的天氣適合外出活動嗎？或想前往人氣投注站買張彩券碰碰運氣中頭彩的機會大嗎？或在家裡對統一發票得到頭獎的機會有多大[1]？投資基金獲利的機會有多少？保險產品保險嗎？違約的機率有多少？由上述例子可知，各項商業活動，在面臨市場的詭譎多變及風險的不確定性，任何公司組織皆無法誇口可永操勝券。若從國家層級來看，人口出生率與死亡率的增減及人口結構比率變化，對於教育、就業、醫療、經濟活動，都會帶來影響。這些風險事件背後皆牽涉到機率。

面對風險事件如何降低其不確定性，增加其確定性以保障人類的生命、財產安全、社會組織健全運作與國家社稷安全，是各國努力的重點方向。在估算自然風險、制度性風險或者技術性風險之設計上面，機率統計的應用更是發揮的淋漓盡致，成為現代社會中不可或缺的協助分析問題與決策之工具。

「機率思考」一書，羅伯麥修斯教授，屏除傳統運用數學公式及抽象符號語言解釋機率的方式，改採平易近人的白話說明，深入淺出的說明機率統計的發展及重要的概念，並例舉實例或圖表來闡明其義理。本文將循此紋理，首先簡要說明與本書論述有關之機率論發展歷史脈絡，作為進一部份開展概念說明的背景知識。第二部分，將會選

[1] 統一發票的得獎機率可參考
https://tw.answers.yahoo.com/question/index?qid=20050113000010KK02589&p=%E7%B5%B1%E4%B8%80%E7%99%BC%E7%A5%A8%E4%B8%AD%E7%8D%8E%E6%A9%9F%E7%8E%87

擇幾項概念加以論述，最後提出總結意見。期待藉此能拋磚引玉激發讀者興趣，作為進一步學習研究的開端是為本文要旨。

貳、機率論發展的簡史

目前在機率與統計應用的教學領域當中，較「忽視」歷史發展的脈絡。「應用」面不斷強化演算解題或公式推導能力，而忽略原理面的理解，零碎各項概念假性的「各自獨立」，無法觸類旁通，其原理與限制更是無法一窺究竟。進行策略規劃或問題分析時，就發生極大的困難點。造成數據選用計算方式不適當、數據呈現不恰當以及數據解讀有誤等等情況，因此，以下梗要介紹機率論的發展。

一、機率論之歷史脈絡概述[2]

首先推算機率的人是 16 世紀的卡爾達諾(Girolamo Cardano)。記載在他的著作中。卡爾達諾的數學著作中有很多給賭徒的短文建議。例如：《誰，在什麼時候，應該賭博？》。卡爾達諾是第一個用機率論描述「隨機現象」的人，但是他卻認為擲骰子的態度及運氣會影響擲骰子（隨機事件）的結果。

義大利科學家伽利略(Galileo Galilei)，這位以天文觀測支持哥白尼「日心說」(地球繞日的學說，又稱地動說)，以證明「地球不是宇宙的中心」的學者，在機率論的發展上，也起了關鍵性的作用，但較少被論及。他是當時以數學方式研究隨機性的人，更重要的事，他拋棄了運氣的想法。

然而，首次提出系統研究機率的是在法國兩位數學家帕斯卡(Blaise Pascal)和費馬(Pierre de Fermat)的往來書信中。這些書信最初是由帕斯卡提出的，他想找費馬請教幾個關於由 Chevalier de Méré[3]提

[2] 可參考 Tabak（2004）有較為詳盡說明。
[3] Chevalier de Méré是一知名作家，路易十四宮廷的顯要，也是一名狂熱的賭徒。

出的兩個問題：擲骰問題和賭金分配問題[4]。兩人在擲骰子的問題討論上，雖然無法預測賭徒下一手（單一事件）會擲出哪一個數字（隨機且獨立），但是如果骰子擲多次以後，就能試著預測某數字出現的「隨機模式」，而後來隨機模式被應用在公共衛生政策制定上面。

其後荷蘭數學家惠更斯(Christian Huygens)曾訪問巴黎一年，雖未見過費馬與巴斯卡，但卻掌握機率論的相關知識，並用拉丁文寫成《論賭博中的計算》，成為最早機率論的數學書。而瑞士數學家雅各布•伯努利(Jacob Bernoulli)受到惠更斯的影響，終身研究機率論，逝世後由姪子協助完成《猜想的藝術》一書，其中最為著名的是所謂「大數法則」[5]。除此之外，此書已將機率論由博弈的計算，擴展到人類經驗的其他面向，例如：量刑的公正性上面。

同樣地，惠更斯的著作也影響晚伯努利 13 年出生的法國數學家棣莫弗[6] (Abraham de Moivre)，棣莫弗 18 歲時，因路易十四 1685 年撤銷南特詔令(Edict of Nantes)，導致鎮壓了法國的改革教會，迫使新教徒流亡或藏匿，結果他們失去了所有的社會認同。棣莫弗還被監禁 2 年，之後他前往英國，擔任家庭教師及教授數學維生。與牛頓、哈雷等科學家結識，自學數學於 1756 發表《機會的學說》，書中引言就稱讚了惠更斯的貢獻，在其學說當中最為人所知就是發現常態曲線，也稱為鐘形曲線。經由棣莫弗的計算，而宣稱不存在運氣[7]。至此之後，機率論成為數學領域一個新的分支。

學者認為棣莫弗在英國可能擔任貝葉思(Thomas Bayes) 家庭教師，啟發對數學與機率的興趣。然而這位英國牧師及數學家在過世後，由家人讓另一位牧師普賴斯(Richard Price)代為發表後，其學說後發展

[4] 參考網址 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A6%82%E7%8E%87

[5] 參考網址 https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%A4%A7%E6%95%B0%E5%AE%9A%E5%BE%8B

[6] 棣莫弗(另翻譯成隸美弗)是一位法國胡格諾派教徒，參考阿米爾．艾克塞爾(2006：97)。

[7] 參考萊文生(2004：18-27)

被稱為貝氏定理[8]。發展至今由於對於研究者是否加入主觀判斷於機率的計算當中有不同見解，目前學界分成兩派陣營，贊成者稱之為「貝葉斯學派」與反對者稱之為「頻率學派」，兩陣營尚爭論當中。由此可見，貝葉斯學說對機率論發展之影響。其他機率論的應用尚有法國數學家布豐(Georges-Louis Leclerc de Buffon)對投針問題的研究、丹尼爾・伯努利[9](Daniel Bernoulli)用機率論研究種牛痘對死亡率的影響、達朗貝爾(Jean le Rond d'Alembert)評論丹尼爾・伯努利的文章，提出風險評估的概念、歐拉(Leonhard Euler)他提供各項方案中獎與損失風險的兩份報告給斐特列大帝，用以發行彩券集資，來償還戰爭債務。

將之前機率論的零散結果集大成者，為法國天文數學家拉普拉斯(Pierre-Simon Laplace)他的思想影響 19 世紀的數學家，著有《解析概率論》。他前往巴黎以一篇解釋力學原理的文章，讓達朗貝爾幫他謀得教職。他重新考慮了丹尼爾・伯努利種痘問題及重釋達朗貝爾之評論也推廣布豐的投針問題，並發展貝葉斯定理。在機率論貢獻上，就是拉普拉斯提出「中央極限定理」，也因此推廣了棣莫弗常態分配的結果。其學生數學物理學家泊松(Simeon-Denis Poisson)提出著名的「柏松分布」，目前已廣泛應用於電話與交通網路設計當中。

參、機率應用當中幾項概念探討

一、「天上掉下來的禮物」---機率

許多人在日常生活當中喜歡「中獎」。這些機率遊戲就成為政府發行彩券及商業活動慣用的手法，其背後都是機率的計算。從前面的機率發展歷史當中，就瞭解政府發行彩券，是開拓財源的一種方法，迄今依舊為世界各國政府所採納，雖然它具有道德上的爭議。商業為促銷舉辦各類抽獎活動，更是衝高營業額的手法。加之大眾媒體時而

[8] 貝氏理論可參考阿米爾・艾克塞爾(2006：89-95)。
[9] 是雅各布・伯努利的姪子。

刊登報導中獎訊息，彷彿中獎機會就在您身邊，只是財神爺從您的身旁「擦身而過」令人扼腕，以此刺激買氣。事實上，依據臺灣彩券網路所公告各類彩券的中獎機率，您就會知道中獎率並不如你所感覺的那樣。誠如《不大可能法則》[10]書中所言，「一定會中獎，但機率小到不行！」[11]。

另外，還有一類中獎是人們不願意碰到的意外事件的機率。其中，一直被國人所關心的「飛安」問題就是一個最為顯著的例子。人們不僅習慣將中獎「特例」視為「常態」，也容易將「災難」單一個別事件，誇大類比為「瘟疫」[12]。依據 CNN 引用航空安全網（Aviation Safety Network）的統計資料的一項報導，2013 年航空事故發生率，一百萬架起飛的飛機中只有 0.24％的飛機失事，等於是四百萬架起飛的飛機中才會有近一架的飛機失事[13]。雖然不及中六合彩頭獎低，但比起汽車失事機率卻遠遠低（據世界衛生組織（WHO）的全球車禍死亡比率。每 10 萬人有 5 至 10 人死亡），所以羅伯麥修斯教授提醒，要多注意相對頻率。

二、「天有不測風雲」---降雨機率

「天氣預報」一直與民眾的生活息息相關，但由於氣象瞬息萬變，要掌握其不確定性，是有其難度。而「降雨機率」又牽涉到防災措施是否啟動、各類交通航班的異動與否、機關上班上課、商業及軍事活動是否啟動或暫停等等事宜。因此，對於「氣象預報」總期望它越精準越好，最好是「神準」100%命中。

[10] 參考大衛．漢德(2014)一書。
[11] 參考謝其政、謝祥化(2017)有專文介紹博弈中的機率。
[12] 羅伯麥修斯書中提及有關媒體報導，大多都屬單一特殊事件，但透過傳播，會讓人誤以為普遍事件，有時甚至會誤導決策。
[13] 參考網址：
http://cooljobz.com/news/862/%E3%80%90%E8%88%AA%E7%A9%BA%E6%A5%AD%E5%B0%8F%E7%9F%A5%E8%AD%98%E3%80%91%E7%A9%BA%E9%9B%A3%E6%A9%9F%E7%8E%87%E7%A9%B6%E7%AB%9F%E5%A4%9A%E4%BD%8E%EF%BC%9F.html

然而，天有不測風雲，依中央氣象局對於「降雨機率」 的說明如下：

降雨機率 60%是什麼意思？[14]

降雨機率預報是預報人員根據各種氣象資料，經過整理、分析、研判後，預測某一地區在預報時段內降雨（指出現 0.1 毫米或以上的降雨）機會的百分數。例如：預報台北市降雨機率 60 %，就是指台北地區有 6 成的機會會出現降雨。換句話說，降雨機率只是預測降雨的〝機會〞有多少，與下雨時間長短、面積大小及雨量大小並無直接關連。

這段說明可能會讓許多人大失所望，一般人可能看到「台北市降雨機率 60%」就以為「極有可能」。其實，它只說明降雨/不降雨(兩種狀況其中一種)可能發生的機率，僅提供的資訊非常有限。對此，書中亦專欄介紹目前氣象預報的分析模擬方法，從機率的角度，其氣象預報的精準度，尚有努力空間。因此，對於氣象報導過高的期待也必須修正。

三、「無巧不成書」---獨立事件[15]

在機率的計算當中，有一個前提假設，那就是必須在事件彼此獨立的情況下，即事件彼此並不相互影響，才能將機率相乘。但在實際的生活當中，許多事物其實彼此相關聯，只是隱而未見，而造成「巧合」[16]之表象。例如：人為的明知，而巧安排為「巧遇」，最為被商業行銷與人際交往所用，違論說是獨立事件。機率論提醒當發生一連串的巧合時，就不要將這些巧合視為獨立事件。尚有因人為的無知，而將「未明事件」與「超自然」(因「難以解釋」遂歸因於超自然) 因素連結，成為「謠言」「預言」而導致穿鑿附會及捕風捉影之說時有所聞。例如：對於鐵達尼號的預言，羅伯麥修斯教授就有破解性的說明。

[14]參考網址 https://www.cwb.gov.tw/V7/knowledge/faq/weatherfaq.htm
[15]參考阿米爾．艾克塞爾(2006：19-23)。
[16]參考阿米爾．艾克塞爾(2006：73-77）另可參考約瑟夫．馬祖爾（2016)。

除此之外，孔子在《孔子家語---五儀解》[17]當中也對卜筮夢兆所提示之「天命」(獨立事件)有精闢之論述，由歷史證據破除其不當連結，而指出造成國家存亡福禍的真正原因。

四、「表現傑出的陷阱」---回歸平均數

上述提及機率理論要達到精確，資料當然是越多越好。除此之外，資料還必須具有「代表性」。然而，一般人總迷信所謂「傑出」之特殊表現，無論是各類評論、選材用人、績效考核、或投資標的之表現，都暴露這樣資料不足，與不具代表性的資料所造成的迷思與危機。因為這一類的「表現」，往往特殊事件或單一事件，而作為決策之主要依據，可能會造成誤判。因為資料不具代表性，往往所謂的「亮點」「賣點」「明星」「傑出事蹟」就容易讓人誤以為，長久以往或在其他面向都會有此傑出表現。其實，一旦幾年過去，有些明星光環就會變得黯淡無光。因此，對於傑出非凡表現，應當慎思明辨才是。而對於身為明星者，也可在回歸平均數的學理當中，學會謙卑。

五、「預防自以為是」---隨機化[18]

由於想要解決「不確定性」常常引發人的許多「猜想」，這些想法常要不是先入為主、就是資料不足、或不具代表性的資料為主，而阻礙我們對事實的探求與認知。對事與對人都造成不當的歸因，而做出錯誤決策。羅伯麥修斯教授指出，「隨機性的價值能使你免於預設的束縛。」[19]在醫療實驗研究當中，運用隨機原理，將兩組病人隨機分派至實驗組與控制組，一組施以注射新藥實驗；另一組注射安慰劑，之後比較兩組病人施藥後的反應，以確認新藥是否有療效。但是「隨機實驗」要有效用，還需要「隨機抽樣」「研究設計的隨機性」作為

---

[17]參考羊春秋注譯（2005：90-92），另萊文生(2004：35-45)對於科學與迷信有進一步說明。
[18]參考阿米爾．艾克塞爾(2006：55-58)。
[19]參考羅伯．麥修斯（2017：80）

前提才行。如果抽樣不隨機，縱然隨機分派，也難有可靠的結果。因此，當引用各類科學研究數據時，要相當注意其抽樣與實驗的隨機性。而正面結果與負面結果其實一樣可貴，但往往正面結果的實驗較容易發表。某些藥廠的實驗，研究設計刻意安排，將新藥與療效微弱(刻意)的藥物做比較，以產生驚人療效的結果，以蒙蔽事實。

六、「賞善罰惡的原理陷阱」---常態分配[20]

「常態分配(布)」(Normal distribution)一詞是由英國統計學家卡爾‧皮爾森(Karl Pearson)於 1893 年 10 月演講中首次使用。其理論的發現係棣莫弗、德國數學家高斯(Carl Gauss) 分別以不同方法發現鐘形曲線。而常態分配，最早由拉普拉斯所發現，由高斯將其發揚光大。依據羅伯麥修斯的解釋，是常態分配中的「常態」，是指依循鐘形曲線的分布狀態，意指尋常、標準與自然。

此論點又經由凱特勒(Adolphe Quetelet)的研究，漸成為社會科學的理論基礎，迄今成為量化研究統計的基礎。其實，卡爾‧皮爾森就對常態分配名詞有所反思。認為此概念會讓人誤以為，只有常態分配是「正常」其他分配是「反常」。也因為這樣誤差，造成許多誤解的考核方式，例如：死當班級 10%的成績不良學生；考績懲戒 10%不良員工等，這些評估方法最後都被包括微軟等公司放棄。因為鐘形曲線並不適用所有人類現象。「常態分配」就連卡爾‧皮爾森本人都認為是極為反常的現象，而且極端值不能盡信。運用常態分配來估計時尤須注意，前提是變數需要獨立，如果變數不獨立，還以常態分配模型作為金融衍生性商品計算極端事件(違約)風險基礎，就容易造成金融風暴，在書中皆有說明。

參、結語

[20] 常態分配的數理統計說明請參考鈴木香織等(2012：76-79) 華波爾等(2006：234-252)

綜上所論，從人類發展機率論的歷史當中，我們須重新思考勿將「異常現象」視為「常態現象」；或以「常態現象」處理「異常現象」。學習將現象本身置於「機率」的思考當中，才不致「患得患失」或者「高估」「低估」「錯估」其現象的真正影響。任何個人的決策與國家政策，也需要有機率思維，才不至於暴露於風險當中，或造成不當的投資而引發危機。

從機率論當中讓人了解「運氣」的機率，反要關心長久的「平均水準」才是更為重要指標。一個國家的「國力」一旦增強，面對及因應風險的成功機率也會大為增加。各科學領域的發展，更能說明這樣的道理。從藥物的研發、氣象的預測、金融商品的估算、能源安全的運算、公共衛生的各項措施等等，都需要機率思考的協助。

透過蒐集資料並納入機率思考增強了對各種不確定現象的解釋，在運用機率思考的同時，也要注意各項概念的應用範圍及其限制，才能避免誤用。機率的進一步運用方面，羅伯麥修斯教授尚提及包括，醫藥研究方面「偽陽性」、「偽陰性」之鑑別；貝式定理之介紹；資料探勘之議題；相關不代表有因果關係；缺乏相關不代表無相關等等課題，書中都有精彩的解說，並指出這些可能經常被忽略的關鍵問題，卻成為目前許多科學研究與決策的潛藏問題與危機。

我國刻正面臨一個關鍵時刻，如何估算擴大經濟規模、重視研究發展、精算就業機會與失業率、估計與設計合理風險分擔機制、人口出生死亡率對教育及其他部門的影響、如何提升交通運輸品質、增強產品良率、提供健康的金融市場、健全社會福利體制、縮減貧富差距、關注氣候變遷對產業及經濟的影響等面向，「機率思考」皆成為提供政府制定相關政策之利器，並可於不確定的年代當中，能夠洞燭機先覺算天下，開創一個永續共生的富足社會。

參考文獻

交通部中央氣象局（2018）。氣象 Q&A，取自

https://www.cwb.gov.tw/V7/knowledge/faq/weatherfaq.htm

臺灣彩券（2018）。Q10：電腦型各遊戲的中獎機率為何 ？。取自

http://www.taiwanlottery.com.tw/faq/faq_faq02_detail10.asp#

周群英譯（2018）。偶然的科學。新北市：八旗文化

Cooljobz（2017）。空難機率究竟多低？。取自

http://cooljobz.com/news/862/%E3%80%90%E8%88%AA%E7%A9%BA%E6%A5%AD%E5%B0%8F%E7%9F%A5%E8%AD%98%E3%80%91%E7%A9%BA%E9%9B%A3%E6%A9%9F%E7%8E%87%E7%A9%B6%E7%AB%9F%E5%A4%9A%E4%BD%8E%EF%BC%9F.htm

謝其政、謝祥化(2017) 。數學機率理論--博弈分析。科學月刊，48 卷 10 期總號 574，頁 738-739。

羅伯・麥修斯（2017)。機率思考（高英哲譯)。新北市：大牌出版

約瑟夫・馬祖爾（2016)。是湊巧還是機率（王秋月譯)。臺北市：臉譜出版

大衛・漢德(2014)。不大可能法則（賴盈滿譯)。臺北市：大塊文化

麥可・布拉斯藍德等（2013)。別說不可能（威治譯)。臺北市：大塊文化

鈴木香織等 (2012)。圖解機率、統計（李貞慧譯）。臺北市:積木文化出版

桑慧敏 (2007)。機率與推論統計原理。 臺北市:麥格羅希爾

阿米爾・艾克塞爾 (2006)。大於1/2--投資、愛情、生活的獲勝機率。(邱文寶譯）臺北市：究竟出版社

華波爾等(2006)。機率與統計 機率篇（呂振森譯）。臺北市:臺灣東華書局

赫夫（2005）。別讓統計數字騙了你（鄭惟厚譯）。臺北市：天下文化

羊春秋注譯（2005）。新譯孔子家語。臺北市：三民書局

萊文生（2004）。統計你贏的機率（葉偉文譯）。臺北市：天下文化

維基百科相關概念說明

Tabak（2004）。Probability & Statistics。NY：Facts On File